# Matematika

## Únor 2024

Počet účastníků: 789
Čistá úspěšnost: 45,4 %
Korig. úspěšnost: 46,2 %
Hrubá úspěšnost: 52,6 %
Průměrné skóre: 15,4
Medián skóre: 16,0

Počet úloh: 35
Max. možné skóre: 34,0
Max. dosažené skóre: 31,7
Min. možné skóre: -11,3
Min. dosažené skóre: -5,7
Směr. odchylka skóre: 6,4

**Rozdíl množin *A* a *B*:** $A \setminus B$ případně $A - B$

**Kvadratická rovnice:** $ax^2 + bx + c = 0$; $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$; $a \neq 0$

**Goniometrické funkce:**

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1,\ x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \neq k\pi$

$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$; $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

| **$x$** | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **$\sin x$** | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $1$ |
| **$\cos x$** | $1$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

**Trigonometrie:** sinová věta: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$; $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$; $\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$

kosinová věta: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos\beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\gamma$

**Logaritmus:** $\log_z(x \cdot y) = \log_z x + \log_z y$; $\log_z \frac{x}{y} = \log_z x - \log_z y$; $\log_z x^k = k \cdot \log_z x$; $\log_z x = y \Leftrightarrow x = z^y$

**Aritmetická posloupnost:** $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

**Geometrická posloupnost:** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1$ **Geometrická řada:** $s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}, |q| < 1$

**Rozklad na součin:** $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + ... + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$

**Kombinatorika:** $P(n) = n!$; $V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$; $C(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$; $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$P'(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + ... + n_k)!}{n_1! n_2! ... n_k!}$; $V'(k,n) = n^k$; $C'(k,n) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$

**Binomická věta:** $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + .... + \binom{n}{n-1}a \cdot b^{n-1} + b^n$

**Analytická geometrie:** velikost vektoru: $\vec{u} = (u_1; u_2)$ je: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Kosinus odchylky $\alpha$ přímek $p_1$: $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$ a $p_2$: $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$ je $\cos\alpha = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

Vzdálenost bodu $M[m_1; m2]$ od přímky $p$: $ax + by + c = 0$ je $|Mp| = \frac{|a \cdot m_1 + b \cdot m_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Středový tvar rovnice kružnice: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$; elipsy: $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$; $e^2 = a^2 - b^2$

Středový tvar rovnice hyperboly: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$; $-\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$; $e^2 = a^2 + b^2$

Vrcholová rovnice paraboly: $(y-n)^2 = \pm 2p \cdot (x-m), F\left[m \pm \frac{p}{2}; n\right]$; $(x-m)^2 = \pm 2p \cdot (y-n), F\left[m; n \pm \frac{p}{2}\right]$

**Objemy a povrchy těles:**

| | Kvádr | Válec | Jehlan | Kužel | Koule |
|---|---|---|---|---|---|
| Objem | $a \cdot b \cdot c$ | $\pi \cdot r^2 \cdot v$ | $\frac{1}{3}S \cdot v$ | $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot v$ | $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ |
| Povrch | $2(ab+ac+bc)$ | $2\pi \cdot r \cdot (r+v)$ | $S+Q$ | $\pi \cdot r \cdot (r+s)$ | $4\pi \cdot r^2$ |

# Matematika

## 1.

Josef má v květnu narozeniny. Je mu nejvýše 66 let a nejméně 54 let. Vynásobením všech tří číslic vyskytujících se v jeho dni a měsíci narození dostaneme číslo odpovídající jeho věku. Kolik je Josefovi let?

**(A)** 55
**(B)** 58
**(C)** **60**
**(D)** 65

## 2.

Míček vyskočí do 90% výšky, ze které padal. Do jaké výšky vyskočí po třetím dopadu, jestliže před prvním dopadem padal z výšky jednoho metru?

**(A)** 300 mm
**(B)** 504 mm
**(C)** **729 mm**
**(D)** 900 mm

## 3.

Karel se v České Třebové rozhodl jít na výlet, šel nejprve 2 kilometry na sever, pak 3 kilometry na východ, poté 4 kilometry na jih a nakonec 5 kilometrů na západ. Jaká je vzdálenost (po případném zaokrouhlení na celé km) místa, do kterého došel, od místa, ze kterého vyrazil?

**(A)** 2 km
**(B)** **3 km**
**(C)** 4 km
**(D)** větší než 4 km

## 4.

Na šachovém turnaji bylo osm hráčů rozděleno po čtyřech do dvou skupin. V prvním kole turnaje hrál v jednotlivých skupinách každý s každým jednu partii – po odehrání všech partií ve skupinách bylo pořadí hráčů jednoznačně určeno. Ve druhém kole hráli vítězové skupin partii o celkové prvenství a druzí ze skupin hráli partii o celkové třetí místo. Celkem kolik partií dohromady proběhlo během turnaje?

**(A)** 7
**(B)** 12
**(C)** **14**
**(D)** 18

## 5.

Které číslice je možné doplnit na místa $X$ a $Y$ (v uvedeném pořadí), aby číslo $70X512Y$ bylo dělitelné třemi i čtyřmi?

**(A)** 4 a 0
**(B)** 3 a 2
**(C)** **2 a 4**
**(D)** 7 a 6

# Matematika

**6.**

Třetinu žáků třídy tvoří dívky. Polovina chlapců a čtvrtina dívek je nemocných. Kolik je ve třídě celkem žáků, zbývá-li 14 zdravých žáků?

**(A)** 21
**(B)** **24**
**(C)** 26
**(D)** 30

**7.**

Máme tyč dlouhou *a* cm, ze které odřízneme několik částí o délce *b* cm. Platí:

$a = 5b + 50$

Které z následujících tvrzení vyplývá z uvedeného vztahu?

**(A)** Kdyby byla tyč o 50 cm delší, počet nařezaných částí by byl pět.
**(B)** Celková délka pěti nařezaných částí je menší než 50 cm.
**(C)** **Celková délka pěti nařezaných částí je o 50 cm menší, než byla původní délka tyče.**
**(D)** Kdybychom tyč nařezali na části o 50 cm delší, byl by celkový počet částí pět.

**8.**

Adamovi je *A* let, Báře je *B* let a Cyrilovi je *C* let. Platí, že:

$10 > A$

$A - 2 = B$

$C + 2 = 6$

Které z následujících tvrzení je určitě pravdivé?

**(A)** Adam je o dva roky mladší než Bára.
**(B)** Cyril je mladší než obě zbývající děti.
**(C)** **Báře je méně než osm let.**
**(D)** Bára je stejně stará jako Cyril.

**9.**

Od čísla 46 odečteme součin šesti a sedmi, výsledek umocníme na druhou, poté provedeme tajnou matematickou operaci a nakonec přičteme podíl dvanácti a čtyř. Která z následujících možností může odpovídat tajné operaci, jestliže jsme uvedeným postupem získali prvočíslo, které je větší než deset?

**(A)** vydělení čtyřmi
**(B)** odečtení pěti
**(C)** **vydělení dvěma**
**(D)** odečtení sedmi

**10.**

Operace & je definována vztahem $x \,\&\, y = x^2 + y^2$. Kolika různých hodnot může nabývat reálné číslo *y*, aby platilo $2 \,\&\, y = 60$?

**(A)** nekonečně mnoha
**(B)** více než dvou, ale méně než deseti
**(C)** **dvou**
**(D)** jedné

# Matematika

**11.**

Které z uvedených čísel je největší?

**(A)** $\dfrac{5!}{2!}$

**(B)** $\dfrac{8!}{6!}$

**(C)** $\dfrac{8!\cdot 3!}{7!}$

**(D)** $\dfrac{6!\cdot 3!}{5!}$

**12.Na zákl. rozhodnutí NOK je úloha vyřazena.**

Jsou dány množiny

$A = \{1, 2, 3, 4\}$,

$B = \{2, 4, 6, 8\}$.

Je-li $C$ množina taková, že platí

$(B \setminus C) \cup (C \setminus A) = \{4, 6, 8\}$,

pak největší možný počet prvků množiny $C$ je:

**(A)** 1
**(B)** 2
**(C)** **3**
**(D)** Žádná taková množina $C$ neexistuje.

**13.**

Jan se potřebuje dostat z Paříže do Prahy, právě je 6:30. Na výběr má tři možnosti přesunu. První možnost je jízda autem a vyrazil by rovnou. Cesta trvá 13 h bez přestávky, ovšem Jan si bude dělat půlhodinové přestávky každé 2 hodiny jízdy. Druhá možnost je cestovat pomocí vlaků, to by mu mělo celkově zabrat 13,5 h, ovšem první vlak mu odjíždí až v 8:30. Poslední možnost je jet autobusy. To by trvalo dohromady 14 h, ale musíme připočítat dvouhodinovou přestávku v jedné z mezizastávek. Autobus mu jede již v 7:00.

Jaké je pořadí způsobů od toho, kterým se Jan dostane do Prahy nejdříve, po ten, kterým přicestuje nejpozději, počítáme-li do toho i přestávky a začáteční čekání na vlak či autobus? Jan nechce během jízdy měnit druhy dopravních prostředků a zanedbáváme jakékoliv zpoždění vzniklé dopravní situací.

**(A)** autem, vlaky, autobusy
**(B)** autem, autobusy, vlaky
**(C)** vlaky, autobusy, autem
**(D)** **vlaky, autem, autobusy**

# Matematika

## 14.

Martin koupil chytré bakterie, které se živí nečistotami v bazénu a díky tomu každý den zdvojnásobí svůj počet. Koupil si jedno balení a to vyčistí jeho bazén za 20 dní. Rychle se ale rozmyslel, vrátil se a koupil ještě jedno další stejné balení. Za jak dlouho dojde k vyčištění jeho bazénu při použití těchto dvou balení současně?

**(A)** za 9 dní
**(B)** za 10 dní
**(C)** za 15 dní
**(D)** **za 19 dní**

## 15.

Pokud pro kladné reálné $x$ platí, že

$$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[12]{8},$$

jakou hodnotu má $x^4$?

**(A)** $2$
$\boxed{\textbf{(B)}\ 2\sqrt{2}}$
**(C)** $4$
**(D)** $4\sqrt{2}$

## 16.

Pro všechna reálná $x$ a $y$ platí rovnost

$$x^2 + axy + 8y^2 - 4y - 4 = (x - 4y + b)(x - 2y + 2),$$

kde $a$, $b$ jsou reálné konstanty. Jakou hodnotu mají tyto konstanty?

**(A)** $\boldsymbol{a = -6;\ b = -2}$
**(B)** $a = -8;\ b = -2$
**(C)** $a = 4;\ b = 2$
**(D)** $a = 6;\ b = 2$

## 17. Na zákl. rozhodnutí NOK uznána dvě správná řešení.

Nerovnici tvaru

$$\frac{3x+1}{x-2} \leq 1$$

vyhovují všechna $x$ z intervalu:

**(A)** $\left\langle -\frac{3}{2}; 2 \right)$
**(B)** $\left( -\frac{3}{2}; 2 \right)$

**(C)** $\left( -\infty; -\frac{3}{2} \right)$
**(D)** $\left\langle 2; \infty \right)$

**18.**

Cyklista ujel první třetinu své trasy stálou rychlostí 10 km/h, druhou třetinu stálou rychlostí 20 km/h a třetí třetinu stálou rychlostí 30 km/h. Která z následujících možností pro jeho celkovou průměrnou rychlost $v$ uvedenou v km/h je pravdivá?

**(A)** $v < 15$
**(B)** $v = 15$
**(C)** $\mathbf{15 < v \leq 17}$
**(D)** $17 < v \leq 20$

**19.**

Která z následujících funkcí **nemá** nulový bod $x = 3$?

**(A)** $h(x) = x^2 - 6x + 9$
**(B)** $h(x) = (x - 3)^2 + 3(x - 3)$
**(C)** $h(x) = x^2 + 0x - 9$
**(D)** $\boldsymbol{h(x) = 3x^2 - 9x + 6}$

**20.**

V nádržích A a B byly o půlnoci stejné kladné objemy vody. Od půlnoci do 5 hodin se za každou hodinu v nádrži A zvýšil objem vody o 10 %, v nádrži B se objem neměnil. Od 5 do 10 hodin se za každou hodinu zvýšil objem vody v nádrži A o 20 % a v nádrži B o $x$ %. Kolik je $x$, pokud v 10 hodin byly v obou nádržích opět stejné objemy vody? (Zvýšení objemu vody o $n$ % za hodinu znamená, že po hodině napouštění je v nádrži o $n$ % více vody než na začátku této hodiny.)

**(A)** 30
**(B)** **32**
**(C)** 35
**(D)** 36

**21.**

Kolik kořenů má rovnice

$\sin 2x + \cos 2x = 0$

v intervalu $(0; 2\pi)$?

**(A)** žádný
**(B)** 2
**(C)** **4**
**(D)** více než 4

**22.**

Jaký je rozdíl mezi součtem všech lichých a součtem všech sudých čísel, která obsahuje interval (2, 100)?

**(A)** 49
**(B)** 50
**(C)** **51**
**(D)** 53

# Matematika

**23.**

Pro které reálné $t$ budou mít grafy funkcí

$f(x) = x^2 + 2$ a $g(x) = 4x + t$

společný právě jeden bod?

**(A) jen pro $t = -2$**
**(B)** jen pro $t = 2$
**(C)** pro kterékoli $t$ z množiny $\{-2; 6\}$
**(D)** pro kterékoli $t$ z množiny $\{2; 6\}$

**24.**

V geometrické posloupnosti je součin čtvrtého a osmého členu roven 144. Jakou hodnotu může mít šestý člen posloupnosti?

**(A)** jen −12
**(B)** jen 12
**(C) jen kteroukoli z množiny {−12; 12}**
**(D)** kteroukoli ze všech reálných čísel kromě nuly

**25.**

1. Funkce $f: y = x + 1$ je prostá.
2. Funkce $f: y = |x| + 1$ je sudá.
3. Funkce $f: y = \log 1 + 1$ je prostá a sudá.
4. Funkce $f: y = \frac{x}{1}$ **nemá** s osou $x$ žádný průsečík.

Kolik ze čtyř výše uvedených tvrzení je pravdivých?

**(A)** právě 1
**(B) právě 2**
**(C)** právě 3
**(D)** právě 4

**26.**

Jsou dána kladná reálná čísla $a$, $b$ tak, že platí $\log_2 a = b$.

Pak $\log_8 a$ je roven:

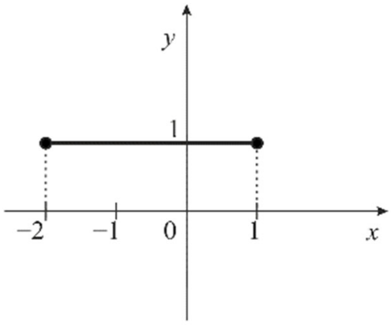
**(A)** $b^3$
**(B)** $b^{\frac{1}{3}}$
**(C)** $3b$
**(D)** $\boxed{\frac{b}{3}}$

# Matematika

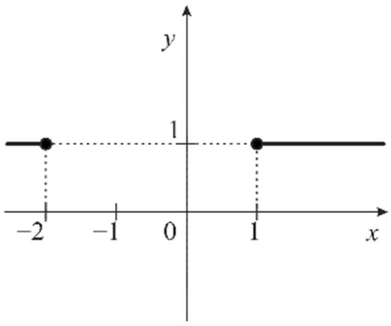
**27.**

Graf funkce $y = \sqrt{\frac{|x^2 + x - 2|}{x^2 + x - 2}}$ je znázorněn na obrázku:

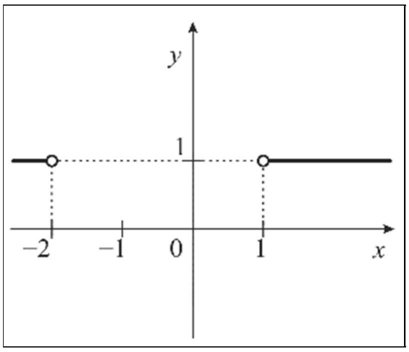
**(A)**



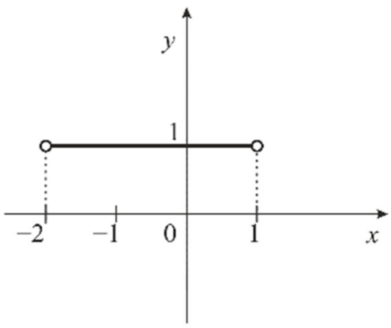

**(B)**




**(C)**




**(D)**



**28.**

V jedenáctičlenném fotbalovém týmu hrají 2 dívky. Trenér náhodně vylosuje 2 hráče. Jaká je pravděpodobnost, že oba vybraní hráči budou dívky?

**(A)** $\frac{1}{110}$

**(B)** $\frac{1}{55}$

**(C)** $\frac{1}{22}$

**(D)** $\frac{2}{11}$

**29.**

V klobouku jsou kuličky o čtyřech různých barvách – červená, zelená, modrá a žlutá. Od každé barvy jsou v klobouku právě 3 kuličky. Taháme-li z klobouku čtyřikrát, kolik existuje pořadí barev vytažených kuliček, kde se alespoň jednou vyskytne červená?

**(A)** 81
**(B)** 171
**(C)** **174**
**(D)** 256

**30.**

Na devíti místech byla změřena teplota vzduchu, průměr z naměřených teplot byl 24,5 °C a medián 22 °C. Poté byla opravena nejnižší naměřená teplota o 1,8 °C směrem dolů. Jak se po této opravě změnily hodnoty průměru a mediánu?

**(A)** Průměr se snížil o méně než 0,2 °C, medián se nezměnil.
**(B)** **Průměr se snížil o 0,2 °C, medián se nezměnil.**
**(C)** Průměr se snížil o 0,2 °C, medián se snížil o méně než 1,8 °C.
**(D)** Průměr se snížil o méně než 0,2 °C, změnu hodnoty mediánu nelze jednoznačně určit.

**31.**

Kolika způsoby lze srovnat čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 do posloupnosti tak, aby součet prvních tří čísel byl 6?

**(A)** 12
**(B)** **36**
**(C)** 48
**(D)** 62

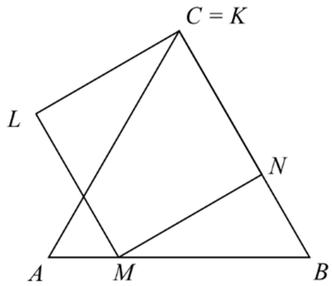
# Matematika

## 32.

Řekněme, že na kuželové ploše máme sestrojeny čtyři kuželosečky: kružnici, elipsu, parabolu, hyperbolu. Který z následujících výroků o nich **nemůže** platit?

**(A)** **Roviny elipsy a kružnice na sebe mohou být navzájem kolmé.**
**(B)** Roviny elipsy a paraboly na sebe mohou být navzájem kolmé.
**(C)** Roviny kružnice a hyperboly na sebe mohou být navzájem kolmé.
**(D)** Roviny paraboly a hyperboly na sebe mohou být navzájem kolmé.

## 33.




Máme rovnostranný trojúhelník *ABC* a čtverec *KLMN*. Bod K leží v bodě *C* a bod *M* leží na straně *AB* a bod *N* leží na straně *BC*.

Které z následujících tvrzení o vztahu obsahů uvedených tvarů platí?

**(A)** Čtverec *KLMN* má větší obsah než trojúhelník *ABC*.
**(B)** Trojúhelník *ABC* a čtverec *KLMN* mají stejný obsah.
**(C)** **Trojúhelník *ABC* má větší obsah než čtverec *KLMN*.**
**(D)** Nelze jednoznačně rozhodnout.

## 34.

Jestliže v trojúhelníku *ABC* je $|BC| = a$, $|AC| = b$, $\alpha = 2\beta$, potom je $\sin\beta$ roven:

**(A)** $\frac{1}{a}\sqrt{4b^2 - a^2}$

**(B)** $\frac{1}{b}\sqrt{4b^2 - a^2}$

**(C)** $\frac{1}{2a}\sqrt{4b^2 - a^2}$

**(D)** $\frac{1}{2b}\sqrt{4b^2 - a^2}$

**35.**

Čtyřstěn $ABCD$ má celočíselné délky hran. Platí-li

$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 5$ a $|AC| = 6$,

pak maximální možná délka hrany $BD$ je rovna:

**(A)** 4
**(B)** 5
**(C)** 6
**(D)** **7**