SCIO

Matematika

Březen 2023

Počet účastníků: 1 439
Čistá úspěšnost: 45,8 %
Korig. úspěšnost: 47,6 %
Hrubá úspěšnost: 53,5 %
Průměrné skóre: 16,0
Medián skóre: 16,0

Počet úloh: 35
Max. možné skóre: 35,0
Max. dosažené skóre: 33,7
Min. možné skóre: -11,7
Min. dosažené skóre: -5,0
Směr. odchylka skóre: 6,7

Rozdíl množin *A* a *B*: $A \setminus B$ případně $A - B$

Kvadratická rovnice: $ax^2 + bx + c = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$; $a \neq 0$

Goniometrické funkce:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1,\ x \neq k \cdot \dfrac{\pi}{2}$

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x},\ x \neq k\pi$

$\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x},\ x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$\left|\sin \dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$; $\left|\cos \dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin *x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos *x*	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Trigonometrie: sinová věta: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$; $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$; $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$

kosinová věta: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos\beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\gamma$

Logaritmus: $\log_z(x \cdot y) = \log_z x + \log_z y$; $\log_z \dfrac{x}{y} = \log_z x - \log_z y$; $\log_z x^k = k \cdot \log_z x$; $\log_z x = y \Leftrightarrow x = z^y$

Aritmetická posloupnost: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $s_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Geometrická posloupnost: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; $s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1$ **Geometrická řada:** $s = a_1 \cdot \dfrac{1}{1-q}, |q| < 1$

Rozklad na součin: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \ldots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$

Kombinatorika: $P(n) = n!$; $V(k,n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$; $C(k,n) = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$; $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$; $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$

$P'(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$; $V'(k,n) = n^k$; $C'(k,n) = \dbinom{n+k-1}{k} = \dbinom{n+k-1}{n-1}$

Binomická věta: $(a+b)^n = a^n + \dbinom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dbinom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \dbinom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + b^n$

Analytická geometrie: velikost vektoru: $\vec{u} = (u_1; u_2)$ je: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Kosinus odchylky α přímek p_1: $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$ a p_2: $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$ je $\cos\alpha = \dfrac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

Vzdálenost bodu $M[m_1; m2]$ od přímky p: $ax + by + c = 0$ je $|Mp| = \dfrac{|a \cdot m_1 + b \cdot m_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Středový tvar rovnice kružnice: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$; elipsy: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$; $e^2 = a^2 - b^2$

Středový tvar rovnice hyperboly: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} - \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$; $-\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$; $e^2 = a^2 + b^2$

Vrcholová rovnice paraboly: $(y-n)^2 = \pm 2p \cdot (x-m), F\left[m \pm \dfrac{p}{2}; n\right]$; $(x-m)^2 = \pm 2p \cdot (y-n), F\left[m; n \pm \dfrac{p}{2}\right]$

Objemy a povrchy těles:

	Kvádr	Válec	Jehlan	Kužel	Koule
Objem	$a \cdot b \cdot c$	$\pi \cdot r^2 \cdot v$	$\frac{1}{3} S \cdot v$	$\frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot v$	$\frac{4}{3} \pi \cdot r^3$
Povrch	$2(ab+ac+bc)$	$2\pi \cdot r \cdot (r+v)$	$S+Q$	$\pi \cdot r \cdot (r+s)$	$4\pi \cdot r^2$

Matematika

1.

Zadní kolo bagru má dvakrát větší průměr než přední kolo. Celkem kolikrát se zadní kolo otočí během ujetí osmkrát větší vzdálenosti, než kterou bagr ujede během 100 otáček předního kola?

(A) 100krát
(B) 200krát
(C) **400krát**
(D) 800krát

2.

Petr má potraviny, které by mu při rovnoměrné spotřebě a gramů denně vystačily na 7 dní tréninkového stravování. Celkem na kolik dní by mu toto množství potravin vydrželo, jestliže by první 3 dny jedl stanovených a gramů potravin denně a počínaje čtvrtým dnem by snížil množství potravin spotřebovaných za den na čtvrtinu?

(A) 11
(B) 15
(C) 16
(D) **19**

3.

Měsíční paušál za službu půjčení auta v půjčovně A je 2000 korun, cena za ujetý km je 10 korun. Měsíční paušál v půjčovně B je 2500 korun, cena za ujetý km je 8 korun. Při kolika měsíčně ujetých kilometrech bude celková částka (paušál plus cena ujetých km) u obou půjčoven stejná?

(A) při 120 km
(B) při 150 km
(C) při 200 km
(D) **při 250 km**

4.

Ve vagónu je 96 míst k sezení. Pokud na každém místě k sezení sedí vždy jeden cestující a ještě 24 cestujících stojí, jaký je podíl stojících cestujících na celkovém počtu cestujících ve vagónu?

(A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{1}{4}$
(D) $\boxed{\frac{1}{5}}$

Matematika

5.

Adam natře za 6 minut 4 plaňky plotu, Pavel za 7 minut 7 planěk. Za jakou nejkratší dobu mohou natřít oba dohromady 100 planěk plotu?

(A) za 50 minut
(B) za 55 minut
(C) **za 60 minut**
(D) za 75 minut

6.

Která z nabídnutých možností patří na místo označené otazníkem v následujícím výrazu, aby vznikla platná rovnost?

$(a+b)^2 \quad ? \quad = (b-a)^2$

(A) $+a^2b^2$
(B) $+4ab$
(C) $-4ab$
(D) $+2ab$

7.

Kopírka okopíruje k stránek za minutu, rychlokopírka okopíruje r stránek za minutu. Platí vztah:

$k = r + 5$

Které z následujících tvrzení vyplývá z uvedeného vztahu?

(A) Rychlokopírka okopíruje za minutu o 5 stránek více než kopírka.
(B) **Při nepřetržitém kopírování okopíruje rychlokopírka za hodinu méně stránek než kopírka.**
(C) Kopírování téhož dokumentu bude na rychlokopírce trvat o 5 minut méně než na kopírce.
(D) Pět kopírek okopíruje za minutu stejný počet stránek jako jedna rychlokopírka.

8.

Mám 2 dálkově ovládané modely aut. Sporťák ujede za stejnou dobu pětkrát větší vzdálenost než náklaďák. Označme C vzdálenost, kterou za minutu ujede sporťák, a B vzdálenost, kterou za minutu ujede náklaďák.

Který z následujících vztahů uvedené situaci odpovídá?

(A) $B = 5C$
(B) $2B = 3C$
(C) $3B = 2C$
(D) $\mathbf{10B = 2C}$

9.

Operace ♥ je definována vztahem A ♥ $B = AB + B + 2$. Které z následujících tvrzení platí o hodnotě 2 ♥ 3 ?

(A) Je menší než 6.
(B) **Je o 1 větší než hodnota 3 ♥ 2.**
(C) Je stejná jako hodnota 6 ♥ 1.
(D) Je větší než 11.

10.

Maminka dala kapesné synům Lukášovi a Martinovi, dohromady X korun. Lukáš a Martin si částku rozdělili v poměru 2 : 3. Lukáš dostal L korun a Martin M korun ($L < M$). Který z následujících vztahů vyplývá z uvedené situace?

(A) $2L + 3M = X$
(B) $2L = 3M$
(C) $M - L = \frac{1}{5}X$
(D) $\frac{2}{5}L + \frac{3}{5}M = X$

11.

Pouze jedna z uvedených rovností **neplatí** pro libovolné množiny A, B. Která?

(A) $(A \cup B) \cap B = B$
(B) $(A \cap \emptyset) \cup B = B$
(C) $(A \cup \emptyset) \cap B = A \cap B$
(D) $(A \cup \emptyset) \cap B = B$

12.

Číslo $4^8 + 26^3$ **není** dělitelné:

(A) třemi
(B) čtyřmi
(C) **pěti**
(D) šesti

13.

Při prvním hlasování bylo 40 poslanců pro a 40 poslanců proti přijetí zákona. Při opakovaném hlasování hlasovalo pro přijetí zákona o 5 % poslanců více než těch, kteří hlasovali proti v prvním kole, takže byl zákon přijat. Kolika procenty poslanců byl zákon přijat?(V obou hlasováních byli přítomni všichni poslanci a nikdo se nezdržel hlasování.)

(A) **52,5 %**
(B) 53,5 %
(C) 54 %
(D) 55 %

14.

Rovnice

$$x^{\frac{2}{p}} + 2x^{\frac{1}{p}} - 15 = 0,$$

kde p je kladný celočíselný parametr, má jediné řešení v oboru reálných čísel, právě když pro parametr p platí:

(A) $p = 1$
(B) ***p* je sudé**
(C) p je liché
(D) žádná hodnota parametru p nevyhovuje

Matematika

15.

Z uvedených možností je největší číslo:

(A) $\left(3^{3}\right)^{2}$

(B) $3^{3^{2}}$

(C) $\left(3^{2}\right)^{3}$

(D) $3^{2^{3}}$

16.

Řešením nerovnice $\frac{1}{1-x} \geq x+1$ jsou právě všechna x ležící v intervalu:

(A) $\langle 0, 1)$
(B) $\langle -1, 1)$
(C) $(-\infty, -1\rangle$
(D) **$(-\infty, 1)$**

17.

Jsou dány funkce $f(x) = x + 3$, $g(x) = 1 - x^2$. Pro která x je $f(g(x)) = 0$?

(A) pro $x = -\sqrt{3}$ nebo $x = \sqrt{3}$
(B) **pro $x = 2$ nebo $x = -2$**
(C) pro $x = 1$ nebo $x = -1$
(D) pro žádné $x \in \mathbf{R}$

18.

Jsou dány funkce:

$$f(x) = \operatorname{cotg} x \cdot \sin x$$

$$g(x) = \frac{2 \cdot \sin^3 x - \sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$$

Pro $x_0 = \frac{3\pi}{4}$ platí:

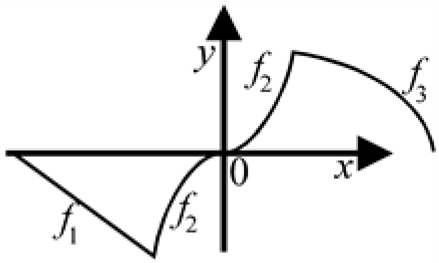
(A) $f(x_0) < g(x_0)$

(B) $f(x_0) > g(x_0)$

(C) Funkce $f(x)$ není definovaná v x_0.

(D) **Funkce $g(x)$ není definovaná v x_0.**

19.



Na obrázku jsou znázorněny grafy funkcí f_1, f_2, f_3, přičemž funkce f_1, f_2 mají společný jeden bod a taktéž funkce f_2, f_3. Pro funkce znázorněné na obrázku platí:

(A) dvě z nich jsou rostoucí
(B) některá z nich je sudá
(C) některá z nich je lichá
(D) žádná není monotónní

20.

Pro každé $n \in \mathbf{N}$ je dán výraz

$(2n - 1) + (2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + \ldots + (4n - 1)$.

Je-li $n \geq 100$, je stý sčítanec roven:

(Jednotlivé sčítance jsou výrazy v závorkách a následující sčítanec je vždy o 2 větší než předchozí sčítanec.)

(A) $2n + 99$
(B) $\mathbf{2n + 197}$
(C) $3n + 98$
(D) $3n + 99$

21.

Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, má kořeny x_1, x_2. Potom čísla $-x_1, -x_2$ jsou kořeny rovnice:

(A) $\boldsymbol{ax^2 - bx + c = 0}$
(B) $ax^2 + bx - c = 0$
(C) $cx^2 + bx + a = 0$
(D) $cx^2 - bx + a = 0$

22.

V geometrické posloupnosti (a_n) s prvním členem $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a kvocientem $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ je člen a_{20} roven:

(A) $\frac{1}{2^{10}}$

$\boxed{\textbf{(B)}\ -\frac{1}{2^{10}}}$

(C) $-\frac{\sqrt{2}}{2^{10}}$

(D) $\frac{1}{2^{11}}$

Matematika

23.

Rovnici

$|x| + x = 1 - |-x|$

vyhovují v **R**:

(A) všechna kladná čísla
(B) **právě dvě čísla**
(C) jediné číslo
(D) žádné číslo

24.

Kořenem x rovnice $\log_x 100 = 1{,}5 + \log_x 12{,}5$ je číslo:

(A) 10
(B) 8
(C) 5
(D) **4**

25.

Organizátoři sportovní soutěže chtějí finančně odměnit všech 15 zúčastněných sportovců. Poslední sportovec dostane 1000 korun, předposlední dostane 1500 korun, třetí od konce dostane 2000 korun atd., tj. vždy mezi bezprostředně za sebou umístěnými sportovci dostane lepší sportovec o 500 korun více. Organizátoři celkově vyplatí částku:

(A) 52 500 korun
(B) 60 000 korun
(C) **67 500 korun**
(D) 72 000 korun

26.

Funkce f je pro každé reálné číslo x určena předpisem $f(x) = a^x$, kde a je kladný reálný parametr.

Je-li $\frac{f(3)}{f(1)} = 8$, pak a je rovno:

(A) 2
(B) $\sqrt{2}$
(C) $2\sqrt{2}$
(D) $3\sqrt{2}$

27.

Čemu je roven pro všechna přirozená čísla $k \geq 2$ následující výraz?

$$\frac{k!}{(k-2)!} - \binom{k}{2}$$

(A) 0
(B) $k \cdot (k-1)$
(C) $\frac{k \cdot (k-1)}{2}$
(D) $\frac{k \cdot (1-k)}{2}$

Matematika

28.

Z vrcholů pravidelného sedmiúhelníka vybereme náhodně trojici různých bodů a spojíme je úsečkami. Pravděpodobnost, že výsledný trojúhelník bude rovnoramenný, je rovna:

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{2}{5}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{4}{7}$

29.

Počet kladných celočíselných dělitelů čísla 1200 nesoudělných s číslem 154 (přičemž číslo 1 považujeme za nesoudělné s libovolným kladným celým číslem) je roven:

(A) **6**
(B) 12
(C) 24
(D) 36

30.

Kolik existuje způsobů, jimiž lze seřadit čísla

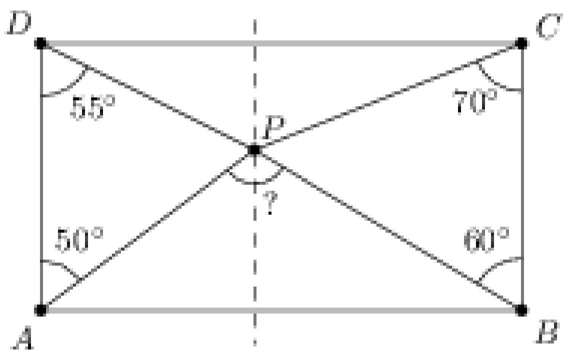
3, 2, 15, 8, 6

tak, aby sudá čísla byla seřazena vzestupně (ne nutně ihned za sebou)?

(A) 8
(B) **20**
(C) 36
(D) 54

31.

Uvnitř obdélníka *ABCD* je dán bod *P*. Jsou-li velikosti vyznačených úhlů jako na obrázku, velikost úhlu *APB* je rovna:



(A) 100°
(B) **110°**
(C) 120°
(D) 130°

32.

Pro reálný parametr p platí, že pro každé přirozené číslo n větší než jedna je trojúhelník se stranami délek $n^2 + 2$, $n^2 - 2$, $p \cdot n$ pravoúhlý, přičemž nejdelší strana má délku $n^2 + 2$. Hodnota p je rovna:

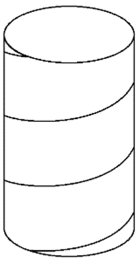
(A) $\sqrt{2}$
(B) 2
(C) $2\sqrt{2}$
(D) 8

33.

Parabola $y^2 - 2y + 2x - 3 = 0$ je souměrná podle přímky:

(A) $x = -1$
(B) $x = 2$
(C) $\boldsymbol{y = 1}$
(D) $y = 2$

34.



Na plášti válce je nakreslena pravidelná šroubovice taková, že se přesně třikrát ovine kolem válce (tedy bod, kde se dotýká horní podstavy, je přesně nad bodem, kde se dotýká dolní podstavy). Je-li průměr válce roven 2 a jeho výška má velikost 3, pak délka šroubovice je:

(A) $3\pi + 4$
(B) $3\pi^2$
(C) $\sqrt{3 + 2\pi}$
(D) $3\sqrt{1 + 4\pi^2}$

35.

Kosočtverec $ABCD$ v rovině je dán souřadnicemi tří jeho vrcholů: $A\,[3; -1]$, $B\,[6; 3]$ a $D\,[3; 4]$. Osa souměrnosti kosočtverce, jež prochází bodem A, je dána rovnicí:

(A) $\boldsymbol{3x - y - 10 = 0}$
(B) $x + 3y + 2 = 0$
(C) $3x + y - 8 = 0$
(D) $x - 3y - 6 = 0$