SCIO

Matematika

Březen 2024

Počet účastníků: 999
Čistá úspěšnost: 41,9 %
Korig. úspěšnost: 42,5 %
Hrubá úspěšnost: 50,0 %
Průměrné skóre: 14,7
Medián skóre: 15,0

Počet úloh: 35
Max. možné skóre: 35,0
Max. dosažené skóre: 33,7
Min. možné skóre: -11,7
Min. dosažené skóre: -5,0
Směr. odchylka skóre: 6,8

Rozdíl množin *A* a *B*: $A \setminus B$ případně $A - B$

Kvadratická rovnice: $ax^2 + bx + c = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$; $a \neq 0$

Goniometrické funkce:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1,\ x \neq k \cdot \dfrac{\pi}{2}$

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x},\ x \neq k\pi$

$\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x},\ x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$\left|\sin \dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$; $\left|\cos \dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Trigonometrie: sinová věta: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$; $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$; $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$

kosinová věta: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos\beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\gamma$

Logaritmus: $\log_z(x \cdot y) = \log_z x + \log_z y$; $\log_z \dfrac{x}{y} = \log_z x - \log_z y$; $\log_z x^k = k \cdot \log_z x$; $\log_z x = y \Leftrightarrow x = z^y$

Aritmetická posloupnost: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $s_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Geometrická posloupnost: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; $s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1},\ q \neq 1$ **Geometrická řada:** $s = a_1 \cdot \dfrac{1}{1-q},\ |q| < 1$

Rozklad na součin: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \ldots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$

Kombinatorika: $P(n) = n!$; $V(k,n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$; $C(k,n) = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$; $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$; $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$

$P'(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$; $V'(k,n) = n^k$; $C'(k,n) = \dbinom{n+k-1}{k} = \dbinom{n+k-1}{n-1}$

Binomická věta: $(a+b)^n = a^n + \dbinom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dbinom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \dbinom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + b^n$

Analytická geometrie: velikost vektoru: $\vec{u} = (u_1; u_2)$ je: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Kosinus odchylky α přímek $p_1: a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$ a $p_2: a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$ je $\cos\alpha = \dfrac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

Vzdálenost bodu $M[m_1; m2]$ od přímky p: $ax + by + c = 0$ je $|Mp| = \dfrac{|a \cdot m_1 + b \cdot m_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Středový tvar rovnice kružnice: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$; elipsy: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$; $e^2 = a^2 - b^2$

Středový tvar rovnice hyperboly: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} - \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$; $-\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$; $e^2 = a^2 + b^2$

Vrcholová rovnice paraboly: $(y-n)^2 = \pm 2p \cdot (x-m), F\left[m \pm \dfrac{p}{2}; n\right]$; $(x-m)^2 = \pm 2p \cdot (y-n), F\left[m; n \pm \dfrac{p}{2}\right]$

Objemy a povrchy těles:

	Kvádr	Válec	Jehlan	Kužel	Koule
Objem	$a \cdot b \cdot c$	$\pi \cdot r^2 \cdot v$	$\frac{1}{3} S \cdot v$	$\frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot v$	$\frac{4}{3} \pi \cdot r^3$
Povrch	$2(ab+ac+bc)$	$2\pi \cdot r \cdot (r+v)$	$S+Q$	$\pi \cdot r \cdot (r+s)$	$4\pi \cdot r^2$

Matematika

1.

O kolik je zlomek, který vznikne ze zlomku $\frac{3}{4}$ přičtením jedničky k čitateli i ke jmenovateli, větší, nebo menší než $\frac{3}{4}$?

(A) menší o 1
(B) je stejně velký
(C) **větší o $\frac{1}{20}$**
(D) menší o $\frac{1}{20}$

2.

Zdeňka uběhne stálou rychlostí 2 kilometry za z minut. Věra uběhne stálou rychlostí 4 kilometry za v minut. Platí:

$$\frac{z}{v} = 2$$

Které z následujících tvrzení vyplývá z uvedeného vztahu?

(A) Zdeňka běží stejně rychle jako Věra.
(B) Zdeňka běží dvakrát rychleji než Věra.
(C) Zdeňka běží dvakrát pomaleji než Věra.
(D) **Věra běží čtyřikrát rychleji než Zdeňka.**

3.

Operace @ je definována vztahem:

$A @ B = 5A + 5B$

Které z následujících tvrzení platí pro hodnotu výrazu (1 @ 2) @ 3?

(A) Je stejná jako hodnota výrazu 1 @ (2 @ 3).
(B) Je záporná.
(C) Je rovna 18.
(D) **Je rovna 90.**

4.

Kolikrát je obsah čtverce o straně délky 6π cm větší než obsah kruhu o průměru 6 cm?

(A) 2krát
(B) 6krát
(C) **4πkrát**
(D) 6πkrát

5.

Martin si na brigádě vydělal čtyřikrát více než Adam a třikrát více než Adam a František dohromady. Celkem kolik korun si vydělali všichni tři dohromady, jestliže Martin si vydělal o 22 000 korun více než František?

(A) 30 000 korun
(B) **32 000 korun**
(C) 36 000 korun
(D) 44 000 korun

Matematika

6.

Jarka se učila na zkoušku. Od chvíle, kdy jí do konce učení zbývaly tři pětiny stanoveného času, do chvíle, kdy jí zbývala už jen třetina stanoveného času, uběhlo 16 minut. Celkem jak dlouho se učila?

(A) 2 hodiny
(B) **1 hodinu**
(C) půl hodiny
(D) Žádná ze zbylých odpovědí není správně.

7.

V restauraci mají rozdílný počet stolů uvnitř (počet stolů uvnitř označme u) a na terase (počet stolů na terase označme t). Platí:

$$\frac{1}{3}t = \frac{1}{2}u$$

Které z následujících tvrzení vyplývá z uvedeného vztahu?

(A) **Uvnitř je o třetinu méně stolů než na terase.**
(B) Uvnitř je o polovinu více stolů než na terase.
(C) Na terase je o dvě třetiny více stolů než uvnitř.
(D) Uvnitř je o dvě třetiny více stolů než na terase.

8.

Aneta má na vysvědčení x jedniček, y dvojek a z trojek, přičemž platí:

$x > 2y$

$z = x + 3$

Které z následujících tvrzení vyplývá z uvedených vztahů?

(A) Aneta má jedniček o 3 více než trojek.
(B) Jak dvojek, tak trojek má Aneta méně, než kolik má jedniček.
(C) Aneta má více trojek než dvojek, ale nejvýše o 3.
(D) **Anetin počet trojek je více než dvojnásobkem jejího počtu dvojek.**

9.

Každé úterý a pátek zalévá školník během školního roku květiny ve škole. Kolikrát musí zalévat během prvního pololetí od 1. září do 31. ledna, začíná-li pololetí ve středu?

(A) 45krát
(B) 44krát
(C) **43krát**
(D) 42krát

10.

Jedna figurka krávy má hodnotu dvou figurek ovcí, jedna figurka ovce má hodnotu dvou figurek slepic. Máme čtyři figurky slepic, tři figurky ovcí a dvě figurky krav, ale tři figurky nám budou odebrány. Jaká je po odebrání figurek minimální a maximální možná celková hodnota zbývajících figurek po přepočtu na slepice?

(A) minimální 6, maximální 15
(B) minimální 6, maximální 18
(C) minimální 8, maximální 15
(D) minimální 8, maximální 18

11.

Obdélníková fotografie měla původně poměr šířky a výšky 16 : 9. Na levém okraji jsme odřízli jednu osminu původní šířky, poté jsme na pravém okraji odřízli jednu sedminu nové šířky. Jakou část původní výšky máme nyní odříznout na horním okraji, aby poté měl zbytek fotografie poměr šířky a výšky 4 : 3?

(A) žádnou
(B) jednu šestnáctinu
(C) jednu dvanáctinu
(D) jednu devítinu

12.

Rozložíme-li číslo 320 000 na součin prvočísel, kolikrát se v tomto součinu bude vyskytovat číslo 2?

(A) pětkrát
(B) sedmkrát
(C) devětkrát
(D) jedenáctkrát

13.

Martin řekl: „Pokud je číslo dělitelné dvěma a zároveň třemi, pak toto číslo není prvočíslo.“

Která z následujících možností obsahuje výrok, který je ekvivalentní uvedenému výroku?

(A) Pokud je číslo prvočíslo, pak není dělitelné dvěma a zároveň není dělitelné třemi.
(B) Pokud číslo není prvočíslo, pak je dělitelné dvěma a zároveň třemi.
(C) Číslo není dělitelné dvěma nebo není dělitelné třemi nebo není prvočíslo.
(D) Číslo je prvočíslo nebo je dělitelné dvěma nebo třemi.

Matematika

14.

Jsou dány množiny

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Je-li C množina taková, že platí

$(A \setminus C) \cup (C \setminus B) = \{1, 2, 3, 5, 7\}$,

pak nejmenší možný počet prvků množiny C je:

(A) 0
(B) 1
(C) **2**
(D) Žádná taková množina C neexistuje.

15.

O dvojici přirozených čísel a, b víme, že

1. a je dělitelem b^2, ale není dělitelem b,

2. b je dělitelem $a + 2$.

Pak součet $a + b$ může být:

(A) 2
(B) 4
(C) **6**
(D) 8

16.

Bílý korálek stojí 2 koruny a černý 3 koruny. Máme koupit přesně třikrát víc bílých korálků než černých a maximálně můžeme utratit 100 korun. Nejvýše kolik korálků můžeme koupit celkem?

(A) 33
(B) 36
(C) 40
(D) **44**

17.

Pro které všechny hodnoty reálného parametru p nebude rovnici $\sqrt{2t + p} + 1 = t$ vyhovovat žádné reálné číslo t?

(A) **jen pro všechna** $p < -3$
(B) jen pro všechna $p < -2$
(C) jen pro všechna $p > 2$
(D) jen pro všechna $p > 3$

18.

Co musíme dosadit za #, aby platila rovnost

$$\frac{2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1}{\#} = 2x^2 - x + 1\,?$$

(A) $x^2 + 1$
(B) $x^4 + 1$
(C) $x^2 - 1$
(D) $x^2 + 2$

Matematika

19.

Josef a Karel opravovali každý samostatně vadné výrobky. Směnu zahájili současně, oprava prvního výrobku trvala Josefovi minutu a Karlovi dvě minuty. Oprava každého dalšího výrobku vždy bezprostředně navazovala na předchozí a Josefovi i Karlovi trvala vždy o dvě minuty déle než jeho oprava předchozího výrobku. Směna skončila, když Josef dokončil opravu výrobku trvající 39 minut. Kolik zcela opravených výrobků měl v tu dobu Karel?

(A) 15
(B) 16
(C) 18
(D) **19**

20.

Kolik existuje řešení rovnice

$$\sin 2x = -\cos x$$

na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$?

(A) 2
(B) 3
(C) **4**
(D) 5

21.

1. Funkce $y = x + 1$ je funkcí inverzní k funkci $y = -x + 1$.
2. Funkce $y = |||x - 1| - 1| - 1|$ je funkce periodická.
3. Funkce $y = |x|$ je funkce prostá.

Kolik ze tří výše uvedených tvrzení je pravdivých?

(A) **právě 0**
(B) právě 1
(C) právě 2
(D) právě 3

22.

Funkce f má právě dva nulové body a platí $f(0) = 1$. Předpis funkce f, který uvedené podmínky splňuje, je:

(A) $y = x^2 - x + 1$
(B) $y = |x| - 1$
(C) $\boldsymbol{y = |x - 2| - 1}$
(D) $y = |x + 1| - 1$

23.

Je dáno nenulové celé číslo a takové, že pro každé nenulové celé číslo b platí

$$b^a = |b|^a$$

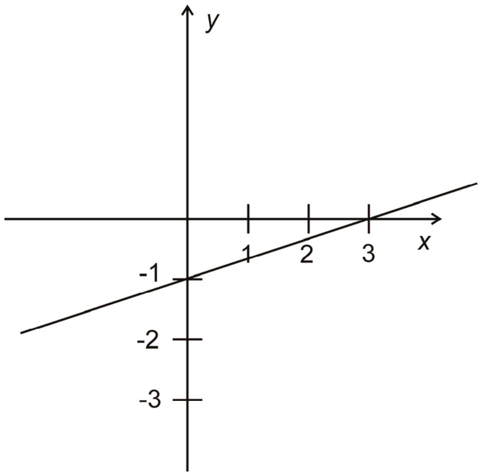
Pak lze s jistotou říci, že číslo a je:

(A) kladné
(B) záporné
(C) **sudé**
(D) liché

Matematika

24.

Určete předpis funkce, jejíž graf je sestrojen na obrázku.



(A) $y = \frac{1}{3}x + 1$

(B) $y = -\frac{1}{3}x + 1$

(C) $y = -\frac{1}{3}x - 1$

(D) $y = \frac{1}{3}x - 1$

25.

V rovnici

log x – log 2 = log 5 + log 3

se x rovná:

(A) 7,5
(B) 10
(C) 15
(D) **30**

26.

Pro množinu M všech řešení nerovnice

$$\frac{4x+1}{x^2-1} > \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$$

platí:

(A) $M = (1; \infty)$
(B) $M = (-\infty; -1)$
(C) $\boldsymbol{M = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)}$
(D) $M = (-1; 1)$

27.

V geometrické posloupnosti (b_n) je $b_1 = \sqrt{3}$, $b_3 = 2\sqrt{3}$. Součet jejích prvních osmi členů může být:

(A) $15\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)$

(B) $15\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

(C) $16\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)$

(D) $16\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

28.

V dlouhodobé soutěži se měl každý tým utkat jednou s každým z ostatních týmů. Jeden z týmů se však během soutěže rozpadl a poslední čtyři plánované zápasy už neodehrál. Celkem se proto odehrálo jen 62 zápasů. Kolik týmů bylo na začátku soutěže?

(A) 10
(B) 11
(C) **12**
(D) 13

29.

Tramvaj přijíždí na zastávku každých 8 minut. Předpokládejme, že přicházíme na zastávku náhodně – nedíváme se na čas. Jaká je pravděpodobnost, že budeme na tramvaj čekat 6 minut nebo více?

(A) **25 %**
(B) 40 %
(C) 50 %
(D) 75 %

30.

Základní hokejová formace se skládá vždy ze dvou obránců, dvou křídel a jednoho centra. V mužstvu je 7 obránců, 5 křídel a 3 centři. Kolika různými způsoby lze sestavit formaci z daných hráčů tak, aby každý byl na správné pozici?

(A) 34 způsoby
(B) 68 způsoby
(C) **630 způsoby**
(D) 5 040 způsoby

31.

V rovnoramenném trojúhelníku se základnou *AB* a vrcholem *C* platí, že poměr výšky na základnu k délce ramene je 4 : 5. Jakou hodnotu má sin γ, kde γ je vnitřní úhel trojúhelníku u vrcholu *C*?

(A) $\frac{12}{25}$

(B) $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{4}{5}$

(D) $\frac{24}{25}$

Matematika

32.

Pro jakou hodnotu poloměru k platí, že obsah čtverce vepsaného kružnici $x^2 + y^2 = k^2$ je roven 8?

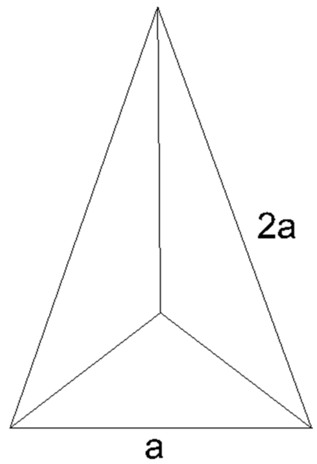
(A) **2**
(B) 2,5
(C) 3
(D) 4

33.

Úhly v trojúhelníku jsou v poměru 1 : 2 : 3. Které z následujících tvrzení o daném trojúhelníku **není** pravdivé?

(A) Jeden z úhlů je právě dvakrát větší než některý ze dvou zbývajících úhlů.
(B) Pokud tomuto trojúhelníku opíšeme kružnici, bude jedna ze stran průměrem kružnice.
(C) **Tento trojúhelník lze zkonstruovat tak, aby i jeho strany byly v poměru 1 : 2 : 3.**
(D) Trojúhelník je pravoúhlý.

34.



Pravidelný trojboký jehlan s podstavnou hranou délky a a boční hranou délky $2a$ má vzdálenost těžiště podstavy a těžiště boční stěny rovnu:

(A) $\frac{2}{3}a$
(B) $\frac{a}{2}$
(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
(D) $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2a$

35.

Množinou všech bodů v rovině, které mají od počátku soustavy souřadnic třikrát větší vzdálenost než od přímky p: $y = 1$, je:

(A) parabola
(B) **hyperbola**
(C) kružnice
(D) elipsa