Matematika

Květen I 2024

Počet účastníků: 990
Čistá úspěšnost: 44,7 %
Korig. úspěšnost: 45,5 %
Hrubá úspěšnost: 51,5 %
Průměrné skóre: 15,6
Medián skóre: 15,7

Počet úloh: 35
Max. možné skóre: 35,0
Max. dosažené skóre: 35,0
Min. možné skóre: -11,7
Min. dosažené skóre: -7,7
Směr. odchylka skóre: 7,4

Rozdíl množin *A* a *B*: $A \setminus B$ případně $A - B$

Kvadratická rovnice: $ax^2 + bx + c = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$; $a \neq 0$

Goniometrické funkce:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1,\ x \neq k \cdot \dfrac{\pi}{2}$

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x},\ x \neq k\pi$

$\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x},\ x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$\left|\sin \dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$; $\left|\cos \dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Trigonometrie: sinová věta: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$; $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$; $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$

kosinová věta: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos\beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\gamma$

Logaritmus: $\log_z(x \cdot y) = \log_z x + \log_z y$; $\log_z \dfrac{x}{y} = \log_z x - \log_z y$; $\log_z x^k = k \cdot \log_z x$; $\log_z x = y \Leftrightarrow x = z^y$

Aritmetická posloupnost: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $s_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Geometrická posloupnost: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; $s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1},\ q \neq 1$ **Geometrická řada:** $s = a_1 \cdot \dfrac{1}{1-q},\ |q| < 1$

Rozklad na součin: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \ldots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$

Kombinatorika: $P(n) = n!$; $V(k,n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$; $C(k,n) = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$; $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$; $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$

$P'(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$; $V'(k,n) = n^k$; $C'(k,n) = \dbinom{n+k-1}{k} = \dbinom{n+k-1}{n-1}$

Binomická věta: $(a+b)^n = a^n + \dbinom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dbinom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \dbinom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + b^n$

Analytická geometrie: velikost vektoru: $\vec{u} = (u_1; u_2)$ je: $|\vec{u}| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}$

Kosinus odchylky α přímek p_1: $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$ a p_2: $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$ je $\cos\alpha = \dfrac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2|}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

Vzdálenost bodu $M[m_1; m2]$ od přímky p: $ax + by + c = 0$ je $|Mp| = \dfrac{|a \cdot m_1 + b \cdot m_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Středový tvar rovnice kružnice: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$; elipsy: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$; $e^2 = a^2 - b^2$

Středový tvar rovnice hyperboly: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} - \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$; $-\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$; $e^2 = a^2 + b^2$

Vrcholová rovnice paraboly: $(y-n)^2 = \pm 2p \cdot (x-m), F\left[m \pm \dfrac{p}{2}; n\right]$; $(x-m)^2 = \pm 2p \cdot (y-n), F\left[m; n \pm \dfrac{p}{2}\right]$

Objemy a povrchy těles:

	Kvádr	Válec	Jehlan	Kužel	Koule
Objem	$a \cdot b \cdot c$	$\pi \cdot r^2 \cdot v$	$\frac{1}{3} S \cdot v$	$\frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot v$	$\frac{4}{3} \pi \cdot r^3$
Povrch	$2(ab+ac+bc)$	$2\pi \cdot r \cdot (r+v)$	$S+Q$	$\pi \cdot r \cdot (r+s)$	$4\pi \cdot r^2$

Matematika

1.

Karolína četla knihu o celkem 210 stránkách. První týden přečetla jednu sedminu z celkového počtu stránek knihy, druhý týden třetinu z počtu do té doby nepřečtených stránek a třetí týden 30 % z celkového počtu stránek knihy. Celkem kolik stránek ještě Karolíně zbývá přečíst?

(A) 47
(B) 50
(C) **57**
(D) 86

2.

Ve směnárně stojí jedna libra 28 korun a při každém nákupu se platí jednorázový poplatek ve výši 200 korun. V bance stojí jedna libra 29 korun, ale žádný poplatek se zde neplatí. Kde zaplatíme při nákupu 200 liber více korun a o kolik?

(A) **Ve směnárně i v bance zaplatíme stejně.**
(B) ve směnárně o 56 korun
(C) v bance o 56 korun
(D) v bance o 490 korun

3.

Do těsta potřebujeme tři sypké suroviny. Mouky potřebujeme o 65 g více než cukru a 28krát více než sody. Kolik potřebujeme sody, pokud sody a cukru potřebujeme celkem 225 g?

(A) 1 g
(B) **10 g**
(C) 15 g
(D) 17,5 g

4.

Ondřej si pustil film z videokazety, který trvá 52 minut 23 sekund. Protože přišli jeho kamarádi, po 4 minutách a 48 sekundách film přehrál na začátek a pustil ho znovu. Převíjení filmu na začátek je šestnáctkrát rychlejší než jeho přehrávání. Poté již film dohrál do konce. Jak dlouhá doba uplynula od prvního spuštění filmu do konce?

(A) 57 minut 13 sekund
(B) **57 minut 29 sekund**
(C) 1 hodina 2 minuty 17 sekund
(D) 1 hodina 2 minuty 33 sekund

5.

Mýdlo stojí M Kč a šampon stojí S Kč. Platí vztah:

$2M = S + 30$

Které z následujících tvrzení je v souladu s uvedeným vztahem?

(A) Cena jednoho mýdla se rovná polovině ceny jednoho šamponu.
(B) Dva šampony stojí o třicet korun více než jedno mýdlo.
(C) **Šampon stojí o třicet korun méně než dvě mýdla.**
(D) Cena jednoho mýdla je o 15 korun nižší, než je polovina ceny jednoho šamponu.

6.

Průměrná cena jedné čokolády při nákupu čtyř čokolád různých druhů je 105 korun. Pokud koupíme ještě jednu (pátou) čokoládu jiného druhu, bude průměrná cena všech pěti čokolád 108 korun. Kolik stojí poslední, pátý druh čokolády?

(A) 72 korun
(B) 84 korun
(C) 120 korun
(D) 128 korun

7.

Jakou stálou rychlostí musí přitékat voda do požární nádrže tvaru kvádru s rozměry 2 metry, 3 metry a 4 metry, aby se bazén naplnil přesně za 2 hodiny od začátku napouštění prázdné nádrže?

(A) 120 l/min
(B) 160 l/min
(C) 200 l/min
(D) 240 l/min

8.

Pavel uběhne stálou rychlostí 4 kilometry za 20 minut, Viktor uběhne stálou rychlostí 6 kilometrů za 45 minut. Čí stálá rychlost je větší a o kolik procent?

(A) Viktorova o 20 %
(B) Viktorova o 28 %
(C) Pavlova o 25 %
(D) Pavlova o 50 %

9.

Z obdélníkového plechu o rozměrech 80 cm a 130 cm se vystřihují čtverce o délce strany 25 cm. Jakého nejmenšího odpadu (to, co zbude po vystřižení čtverců) je možné dosáhnout?

(A) 1 050 cm^2
(B) 1 025 cm^2
(C) 950 cm^2
(D) 775 cm^2

10.

Operace $\#A$ je definována tak, že od dvojnásobku čísla A odečteme číslo 10. Operace $\&A$ je definována tak, že k polovině čísla A přičteme číslo 10. Čemu se rovná &(#16)?

(A) 16
(B) 18
(C) 21
(D) 26

Matematika

11.

Pavlovi se narodili mladší sourozenci – dvojčata. Po 5 letech od jejich narození byl Pavlův věk o 20 % vyšší než součet věků obou dvojčat. Kolik let bude Pavlovi, až bude součet věků obou dvojčat roven jeho věku?

(A) 10 let
(B) 12 let
(C) **14 let**
(D) 16 let

12.

Dívky Adéla a Bára a chlapci Cyril, David, Emil a Filip psali test, ve kterém získali při seřazení od nejméně úspěšného po nejúspěšnějšího řešitele postupně 10, 15, 18, 20, 22 a 30 bodů. Přitom víme, že Bára získala právě o 5 bodů více než David, že Emil získal méně než poloviční počet bodů oproti Filipovi a že Cyril získal alespoň o 10 bodů více než Adéla.

Kolik bodů získaly v průměru dívky?

(A) 17,5 bodu
(B) 18,5 bodu
(C) **19 bodů**
(D) 20 bodů

13.

Jsou dány dvě neprázdné množiny A, B.

Jestliže $A \subset B \land B \subset A$, potom **neplatí**:

(A) $A \cap B = B$
(B) $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$
(C) $A \cup B = A$
(D) $A \cap B = A \cup B$

14.

Olga s Petrem mají dohromady 1 000 EUR. Kdyby Olga dala Petrovi 100 EUR, měla by o 50 EUR méně než Petr. Kolik EUR má Petr?

(A) 400
(B) **425**
(C) 450
(D) 475

15.

Výraz

$(a + b)^{10} - (a - b)^{10}$

upravíme podle binomické věty a členy se stejnými mocninami sečteme. Kolik má po těchto úpravách výsledný mnohočlen členů (sčítanců)?

(A) **5**
(B) 6
(C) 10
(D) 11

Matematika

16.

1) Funkce $y = \frac{x+1}{x-1}$ je zdola omezená.
2) Funkce $y = \left| |x-1| - 1 \right|$ je zdola omezená.
3) Funkce $y = \sin x - \cos x$ je shora i zdola omezená.

Kolik ze tří výše uvedených tvrzení je pravdivých?

(A) právě 0
(B) právě 1
(C) **právě 2**
(D) právě 3

17.

Součet všech přirozených čísel z intervalu $\langle 1; 200 \rangle$, která jsou násobkem čtyř, označíme S. Které z následujících tvrzení o hodnotě S je pravdivé?

(A) $S \leq 5\,050$
(B) **$5\,050 < S \leq 5\,100$**
(C) $5\,100 < S \leq 5\,200$
(D) $S > 5\,200$

18.

Která z následujících funkcí protíná osu x v intervalu $(-2\pi; 2\pi)$ právě 4krát?

(A) $y = 2\sin 2x$
(B) $y = 2\cos 2x$
(C) $y = \frac{\sin x}{2}$
(D) $y = \frac{\cos x}{2}$

19.

Množinou všech řešení rovnice

$\sin 2x \cdot \cos^2 x = 0$

je množina:

(A) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\}$
(B) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$
(C) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$
(D) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 2k\pi \right\}$

Matematika

20.

Graf funkce

$y = 2 - \sqrt{|x-2|\left(2+|x|\right)}$

v intervalu $(-\infty; 0\rangle$ leží na přímce:

(A) $y = \frac{1}{2}x$

(B) $\boxed{y = x}$

(C) $y = 2x$

(D) $y = 2x - 1$

21.

Všechna řešení kvadratické nerovnice

$x^2 + x - 70 \le 2$

představuje:

(A) $(-\infty; -9\rangle$
(B) $(-\infty; -9\rangle \cup \langle 8; \infty)$
(C) **$\langle -9; 8\rangle$**
(D) $(-9; 8)$

22.

Hodnota výrazu

$1999 - 1997 + 1995 - 1993 + ... + 7 - 5 + 3 - 1$,

v němž se nacházejí postupně všechna lichá čísla od 1999 do 1 a kde se pravidelně střídají znaménka, je rovna:

(A) 0
(B) 999
(C) **1000**
(D) 2000

23.

Řešením rovnice

$\left[\left(3^x - 1\right)\left(3^x + 1\right) + 1\right]^{-2} = 81$

je číslo:

(A) $\boxed{x = -1}$

(B) $x = -\frac{1}{2}$

(C) $x = \frac{1}{2}$

(D) $x = 2$

Matematika

24.

Hodnota výrazu

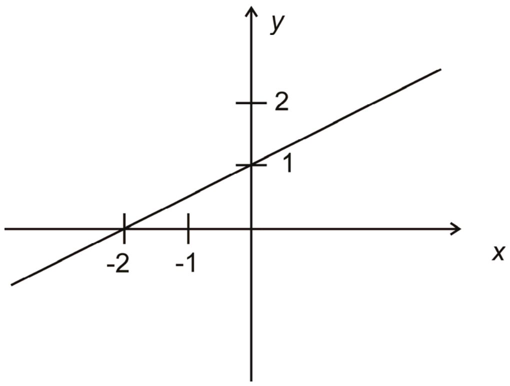
$4\log 2 - 2\log 4$

je rovna:

(A) $-\log 4$
(B) $-\log 2$
(C) **0**
(D) $\log 2$

25.

Určete předpis funkce, jejíž graf je sestrojen na následujícím obrázku.



(A) $y = \frac{1}{2}x - 2$

(B) $y = \frac{1}{2}x + 1$

(C) $y = -\frac{1}{2}x - 2$

(D) $y = 2x + 1$

26.

V geometrické posloupnosti (a_n) platí $a_1 = \frac{1}{4}$, $q = -8$. Členem této posloupnosti je číslo:

(A) **–8 192**
(B) –1 040
(C) 1 040
(D) 8 192

27.

Šest kamarádů (Dan, Eva, Filip, Gábina, Honza, Iva) se má rozesadit do řady šesti míst vedle sebe. Přitom Dan bude sedět vedle Evy a Honza vedle Ivy. Kolik je možných takových rozsazení?

(A) $4! + 2!$
(B) $4! \cdot 2!$
(C) $\mathbf{4! \cdot 2^2}$
(D) $6! - 4!$

Matematika

28.

V pytlíku je pět oranžových kuliček, tři fialové kuličky a dvě růžové kuličky. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnu dvakrát za sebou růžovou kuličku, pokud první vytaženou kuličku před druhým tahem vrátím zpět do pytlíku?

(A) 0,02
(B) 0,04
(C) 0,2
(D) 0,4

29.

Zapíšeme-li číslo 21! v desítkové soustavě, počet nul za poslední nenulovou číslicí je:

(A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7

30.

Součet

$$\binom{8}{0}+\binom{8}{2}+\binom{8}{4}+\binom{8}{6}$$

je roven:

(A) 2^7-1

(B) 2^6

(C) $2\cdot\binom{8}{4}$

(D) $\binom{8}{4}$

31.

Pro elipsu danou rovnicí

$25x^2 + 9y^2 - 36y - 189 = 0$

platí:

(A) elipsa má střed v bodě [−2; 0], hlavní poloosa má velikost 3 a vedlejší 5
(B) elipsa má střed v bodě [0; −2], hlavní poloosa má velikost 5 a vedlejší 3
(C) elipsa má střed v bodě [0; 2], hlavní poloosa má velikost 5 a vedlejší 3
(D) elipsa má střed v bodě [2; 0], hlavní poloosa má velikost 5 a vedlejší 3

32.

Lyžař sjel svah, který rovnoměrně klesá pod úhlem 10° a má délku 200 m. Jaký rozdíl nadmořských výšek odpovídá tomuto pohybu?

(A) $200\sin 10°$ **m**

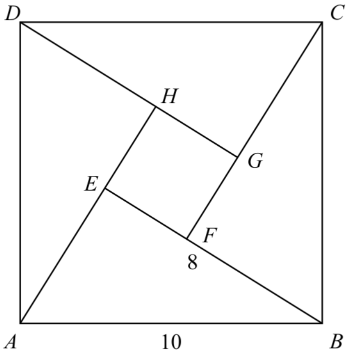
(B) $\dfrac{200}{\sin 10°}$ m

(C) $200\cos 10°$ m

(D) $\dfrac{200}{\cos 10°}$ m

Matematika

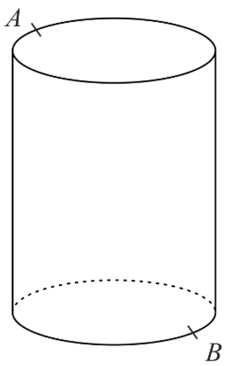
33.



Jsou-li *ABCD* a *EFGH* čtverce umístěné jako na obrázku, $|AB| = 10$ a $|BE| = 8$, pak obsah čtverce *EFGH* je roven:

(A) **4**
(B) 6
(C) 8
(D) 9

34.



Je dán válec s poloměrem podstavy $r = 1$ m a výškou $v = 3$ m. Rovina, která prochází středy obou podstav, protíná hranu horní podstavy v bodě *A* a hranu dolní podstavy v bodě *B* podle obrázku. Odhadněte na dvě desetinná místa, jaká je nejkratší vzdálenost bodů *A*, *B* měřená na plášti válce:

(A) přibližně 5,20 m
(B) přibližně 5,00 m
(C) přibližně 4,56 m
(D) **přibližně 4,34 m**

35.

V rovině jsou dány čtyři různé body *A*, *B*, *C*, *D*. Je-li

$|AB| = |AC| = |AD| = |BC| = |BD| = 1$,

pak délka úsečky *CD* je rovna:

(A) 1
(B) $\sqrt{2}$
(C) $\sqrt{3}$
(D) 2